27/4/17

Ώρες γραφείου
Δευτέρα 2:00-
Παρασκευή 11:00-

$\circledast \to$ Άσκηση από προηγούμενη φορά!

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$e^A = I_m + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad e^A = ;$$

A διαγωνίσιμος

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} = (x-5)(x+1)$$

$$V(5) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$e^{A} = I_m + P\Delta P^{-1} + \frac{1}{2} P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} \dots + \frac{1}{n!} P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} \dots P\Delta P^{-1} + \dots$$

$$= I_m + P\Delta P^{-1} + \frac{1}{2!} P\Delta^2 P^{-1} + \dots + \frac{1}{n!} P\Delta^n P^{-1} + \dots$$

$$= P I P_n^{-1} + P\Delta P^{-1} + \frac{1}{2!} P\Delta^2 P^{-1} + \dots + \frac{1}{n!} P\Delta^n P^{-1} + \dots$$

$$= P \left(I_m + \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^n}{n!} + \dots \right) P^{-1}$$

$$= P e^{\Delta} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^5 & e^{-1} \\ 2e^5 & -e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^5 + \frac{2e^{-1}}{3} & \frac{e^5}{3} - \frac{e^{-1}}{3} \\ \frac{2}{3}e^5 - \frac{2}{3}e^{-1} & \frac{2}{3}e^5 + \frac{e^{-1}}{3} \end{pmatrix}$$

O.K.B. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ βάση του $(E, \langle\ ,\ \rangle)$

<u>Ορ</u>: $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ OKB αν και μόνο αν $\langle \vec{\gamma_i}, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$

ορθοκανονική ή ορθομοναδιαία

Scanned by CamScanner

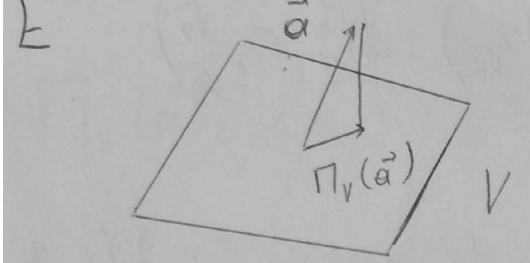
$\vec{x} = x_1\vec{\gamma_1} + x_2\vec{\gamma_2} + \dots + x_n\vec{\gamma_n}$

$\vec{y} = y_1\vec{\gamma_1} + y_2\vec{\gamma_2} + \dots + y_n\vec{\gamma_n}$

$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

<u>Ορθογώνια προβολή:</u> $\vec{a} \in (E, \langle , \rangle)$ και V υποχώρος του



Έστω $\vec{\gamma_1}, \dots, \vec{\gamma_m}$ μια ορθοκανονική βάση

$\Pi_V(\vec{a}) = \langle\vec{a},\vec{\gamma_1}\rangle\vec{\gamma_1} + \langle\vec{a},\vec{\gamma_2}\rangle\vec{\gamma_2} + \dots + \langle\vec{a},\vec{\gamma_m}\rangle\vec{\gamma_m}$

3 (Φυλλάδιο #5) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-y-z=0\}$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x+2y-3z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{matrix}\}$

$V = \{(s+t, t, s) / s,t \in \mathbb{R}\} = \{s(1,0,1) + t(1,1,0) / s,t \in \mathbb{R}\}$

$x-y-z=0$ $\quad (1\ -1\ -1\ /\ 0)$ $\quad = \langle(1,0,1),(1,1,0)\rangle$

$x = s+t$

$y = t$ $\quad$ είναι βάση του V;

$z = s$

$\vec{a}_1 = (1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,0)$

$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = (1,0,1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 = (1,1,0) - \frac{\langle (1,1,0),(1,0,1) \rangle}{\langle (1,0,1),(1,0,1) \rangle} (1,0,1)$$

$$= (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\gamma}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{\gamma}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{4}+1+\tfrac{1}{4}}}\left(\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\left(\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

ΟΚΒ του W;

$x + 2y - 3z = 0$

$2x + y - 3z = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= t \\ y &= t \\ z &= t \end{aligned}$$

$W = \{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1) \rangle$

Άρα $(1,1,1)$ είναι βάση του W $\qquad (1,1,1) \neq (0,0,0)$

$\vec{a}_1 = (1,1,1)$

$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = (1,1,1)$

$\vec{\gamma}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Pi_V(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{\gamma}_1 \rangle \vec{\gamma}_1 + \langle \vec{a}, \vec{\gamma}_2 \rangle \vec{\gamma}_2 + \dots \langle \vec{a}, \vec{\gamma}_m \rangle \vec{\gamma}_m$

$\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_m$ O.K.B του V

$\Pi_V(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 + \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \vec{b}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_m \rangle}{\langle \vec{b}_m, \vec{b}_m \rangle} \vec{b}_m$

$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ ορθογώνια βάση

$\Pi_V((1,1,1)) = \langle (1,1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) +$

$\langle (1,1,1), \left(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \rangle \left(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$= (1,0,1) + \left(1/3, 2/3, -\frac{1}{3}\right) = (4/3, 2/3, 2/3)$

<u>Ορισμός</u>: Έστω V ένας υποχώρος του Ευκλείδιου χώρου E. Τότε ορίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V να είναι το σύνολο

$$V^{\perp} = \{\vec{a} \in E \,/\, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \forall\ \vec{b} \in V\}$$

<u>Παρατήρηση</u>: $V^{\perp}$ είναι υπόχωρος του E

i) $\vec{0} \in V^{\perp}$ αφού $\langle \vec{0}, \vec{b} \rangle = 0$ για κάθε $\vec{b}$

ii) $\vec{a_1}, \vec{a_2} \in V^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{a_1}, \vec{b} \rangle = 0,\ \langle \vec{a_2}, \vec{b} \rangle = 0$ για κάθε $\vec{b} \in V$

$\langle \vec{a_1} + \vec{a_2}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a_1}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a_2}, \vec{b} \rangle = 0 + 0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a_1} + \vec{a_2} \in V$

iii) $\vec{a} \in V^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \ \forall\ \vec{b} \in V$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda \vec{a} \in V^{\perp}$$

iv) $E^{\perp} = \{\vec{0}\}$

$\{\vec{0}\}^{\perp} = E$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $(E, \langle\,,\,\rangle)$ ένας Ευκλείδιος χώρος με $\dim E = n$ και V υπόχωρος του E τότε ισχύει $E = V \oplus V^{\perp}$

$\vec{\gamma}_1, \dots \vec{\gamma}_m$ ΟΚΒ του V

$m \le n$

$$\Pi_V(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{\gamma}_1 \rangle \vec{\gamma}_1 + \dots + \langle \vec{a}, \vec{\gamma}_m \rangle \vec{\gamma}_m \in V$$

Έστω $\vec{a} \in E$

$$\vec{a} = \underset{\in V}{\Pi(\vec{a})} + \overset{\in V^{\perp};}{(\vec{a} - \underbrace{\Pi_V(\vec{a})})}$$

$$\langle \vec{a} - \Pi_V(\vec{a}), \vec{\gamma_i} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\gamma_i} \rangle - \langle \Pi_V(\vec{a}), \vec{\gamma_i} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\gamma_i} \rangle - \langle \langle \vec{a}, \vec{\gamma_1} \rangle \vec{\gamma_1} + \ldots + \langle \vec{a}, \vec{\gamma_m} \rangle \vec{\gamma_m}, \vec{\gamma_i} \rangle =$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{\gamma_i} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{\gamma_1} \rangle \langle \cancel{\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_i}}^{0} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{\gamma_2} \rangle \langle \cancel{\vec{\gamma_2}, \vec{\gamma_i}}_{0} \rangle + \ldots \langle a, \gamma_i \rangle \langle \gamma_i, \gamma_i \rangle + \langle \vec{a}, \vec{\gamma_m} \rangle \langle \cancel{\vec{\gamma_m}, \vec{\gamma_i}}^{0} \rangle$$

Άρα το $\vec{a} - \Pi_V(\vec{a})$ είναι κάθετο σε κάθε $\vec{\gamma_i}$

Έστω $\vec{b} \in V = \langle \vec{\gamma_1}, \ldots, \vec{\gamma_m} \rangle \Rightarrow \vec{b} = \lambda_1 \vec{\gamma_1} + \ldots + \lambda_m \vec{\gamma_m}$

$$\langle \vec{a} - \Pi_V(\vec{a}), \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} - \Pi_V(\vec{a}), \lambda_1 \vec{\gamma_1} + \ldots \lambda_m \vec{\gamma_m} \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle \vec{a} - \Pi_V(\vec{a}), \vec{\gamma_1} \rangle + \ldots + \lambda_m \langle \vec{a} - \Pi_V(\vec{a}), \vec{\gamma_m} \rangle$$

$$= \lambda_1 0 + \ldots + \lambda_m 0 = 0$$

Άρα $\vec{a} - \Pi_V(\vec{a}) \in V^{\perp}$ Άρα $E = V + V^{\perp}$

Έστω $\vec{u} \in V \cap V^{-1} \Rightarrow \vec{u} \in V, \vec{u} \in V^{-1} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \underset{\text{εσωτερ. γινομένου}}{\overset{\text{ορισμ.}}{\Rightarrow}} \vec{u} = 0$

Άρα $V \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow E = V \oplus V^{\perp}$

Θεώρημα: Έστω $(E, <, >)$ ένας Ευκλείδιος χώρος διάστασης n και V υποχώρος του E τότε $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Απόδειξη: Έστω $\vec{a} \in V \Rightarrow <\vec{a}, \vec{b}> = 0 \quad \forall b \in V^{\perp}$

$$\Rightarrow \vec{a} \in (V^{\perp})^{\perp} \Rightarrow V \subset (V^{\perp})^{\perp}$$

$$E = V \oplus V^{\perp} = (V^{\perp})^{\perp} \oplus V^{\perp}$$

$$n = \dim E = \dim V + \dim V^{\perp} = \dim (V^{\perp})^{\perp} + \dim V^{\perp}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dim V = \dim((V^{\perp})^{\perp}) \\ V \subset (V^{\perp})^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow (V^{\perp})^{\perp} = V$$

$$E = V \oplus V^{\perp} = V^{\perp} \oplus (V^{\perp})^{\perp} = (V^{\perp})^{\perp} \oplus V^{\perp}$$

Ορισμός: Έστω $(E, <, >)$ Ευκλείδιος χώρος διάστασης n και V, W δύο υποχώροι του. Οι V, W ονομάζονται ορθοσυμπληρωματικοί αν $W = V^{\perp}$

$(V = W^{\perp}$

$$W = V^{\perp}$$

$$W^{\perp} = (V^{\perp})^{\perp} = V$$

Άσκηση 4 / Φυλλάδιο #5

$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \}$

V, W συμπληρωματικά;

<u>Λύση</u>: $W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \}$

$= \{ (x_1, x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x_1 (1,1,1,1) \mid x_1 \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1,1,1) \rangle$

$W^{\perp} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R} \mid \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda) \rangle = 0$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$W^{\perp} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0 \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \} = V$

Ισομετρίες:

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(E, <,>)$ και $(F, <,>)$ Ευκλείδιοι χώροι και $f: E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Η f ονομάζεται ισομετρία αν ισχύει $\|\vec{a}\| = \|f(\vec{a})\|$ για κάθε $\vec{a} \in E$.

<u>Παράδειγμα Ισομετρίας</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

και οι δύο είναι με το σύνηθες εσωτ. γινόμενο

$$f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

$\|f(x,y)\| = ;$

$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\|f(x,y)\| = \left\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + \frac{y^2}{4} + 2\frac{\sqrt{3}}{2}xy\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 + 2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}y}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$

Θεώρημα: Έστω $(E, <,>)$ και $(F, <,>)$ δύο Ευκλείδειοι χώροι και $f: E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν ισχύει $<\vec{a}, \vec{b}>_E = <f(\vec{a}), f(\vec{b})>_F$ για κάθε $\vec{a}, \vec{b} \in E$

Απόδειξη: $(\leftarrow)$ $<\vec{a}, \vec{a}>_E = <f(\vec{a}), f(\vec{a})>_F$

$$\sqrt{<\vec{a}, \vec{a}>} = \sqrt{<f(\vec{a}), f(\vec{a})>}$$

$$\|\vec{a}\|_E = \|f(\vec{a})\|_F$$

$(\rightarrow)$ Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in E$ $\quad$ f ισομετρία

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|f(\vec{a} + \vec{b})\|$$

f γραμμική

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|f(\vec{a}) + f(\vec{b})\|$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|f(\vec{a}) + f(\vec{b})\|^2$$

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2<\vec{a}, \vec{b}> = \|f(\vec{a})\|^2 + \|f(\vec{b})\|^2 + 2<f(\vec{a}), f(\vec{b})>$$

$$\Rightarrow 2<\vec{a}, \vec{b}> = 2<f(\vec{a}), f(\vec{b})>$$

$$\Rightarrow <\vec{a}, \vec{b}> = <f(\vec{a}), f(\vec{b})>$$